

Contrôle Continu N°2

Exercice 1. On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . On considère l'endomorphisme f_m de \mathbb{R}^3 défini par :

$$f_m(e_1) = me_1 + e_2 + e_3$$

$$f_m(e_2) = e_1 + me_2 + e_3$$

$$f_m(e_3) = e_1 + e_2 + me_3$$

Où m est un paramètre réel.

- 1) Ecrire la matrice $M(f_m, B)$ de cette application dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- 2) Pour quelles valeurs de m , $M(f_m, B)$ est inversible ?
- 3) Calculer le noyau de f_m et $\text{Im} f_m$. Quel est son rang ? Discuter suivant les valeurs de m .
- 4) On considère l'ensemble $E = \{M(f_m, B), m \in \mathbb{R}\}$. E est-il un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$? E est-il stable pour la multiplication des matrices ?

- 5) Discuter suivant la valeur de m l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} mx + y + z = m - 1 \\ x + my + z = m + 2 \\ x + y + mz = m^2 - 1 \end{cases}$$

- 6) Pour la suite, on prend $m = 2$. On définit :

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_1 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + e_2$$

- i) Montrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- ii) Donner la matrice $M(f_2, B')$. On notera A cette matrice.
- iii) Calculer le polynôme caractéristique de A , en déduire les valeurs propres de A .
- iv) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A .
- v) La matrice A est-elle diagonalisable ?
- vi) Calculer la puissance n -ième de A .

22

Exercice 1

$$1/ \quad M = M(f_m, B) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$2/ \quad \det M = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m^3 + 1 + 1) - (m + m + m) = m^3 - 3m + 2 \\ = (m-1)(m-1)(m+2) = (m-1)^2(m+2)$$

M est inversible $\Leftrightarrow \det M \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ et $m \neq -2$

$$3/ \quad \text{Ker } f_m = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f_m(x, y, z) = (0, 0, 0) \}$$

$$f_m(x, y, z) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx + y + z \\ x + my + z \\ x + y + mz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$$

1° cas: Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$ alors $\det M \neq 0$

le système est de Cramer et homogène donc $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$$\text{d'où } \text{Ker } f_m = \{(0, 0, 0)\}$$

$$\text{On a } \dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker } f_m + \dim \text{Im } f_m \Rightarrow \dim \text{Im } f_m = 3 - 0 = 3$$

$$\text{d'où } \text{Im } f_m = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{rg } f_m = 3$$

2° cas: Si $m = 1$ alors le système se réduit à l'équation

$$x + y + z = 0 \Rightarrow z = -x - y$$

$$(x, y, z) = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$$

$B_1 = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ est une famille génératrice de $\text{Ker } f_1$

or B_1 est l.h.e. ($\alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$)

donc B_1 est une base de $\text{Ker } f_1$ et $\dim \text{Ker } f_1 = 2$

$$\text{De plus } \dim \text{Im } f_1 = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f_1 = 3 - 2 = 1$$

$$\text{et } f_1(e_1) = f_2(e_2) = f_3(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

$$\text{d'où } \text{Im} f_1 = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3) \Rightarrow \text{rg } f_1 = \dim \text{Im} f_1 = 1$$

3 cas Si $m = -2$ alors le système s'écrit

$$\cdot = \begin{cases} -2x + y + z = 0 & (1) \\ x - 2y + z = 0 & (2) \\ x + y - 2z = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow -x - y + 2z = 0 \text{ équivalent à l'équation (3)}$$

$$\text{donc le système se réduit à } \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = -z \\ x - 2y = -z \end{cases}$$

$$(1) + 2(2) \Rightarrow -3y = -3z \Rightarrow y = z \text{ et } x = -z + 2z = z$$

$$\text{d'où } (x, y, z) = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$$

$$\text{Ker } f_{-2} = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$$

$$\dim \text{Im} f_{-2} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f_{-2} = 3 - 1 = 2$$

$$\text{et } f_{-2}(e_1) = -2e_1 + e_2 + e_3, \quad f_{-2}(e_2) = e_1 - 2e_2 + e_3$$

$$\text{Im} f_{-2} = \text{Vect}(-2e_1 + e_2 + e_3, e_1 - 2e_2 + e_3)$$

4/. E n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_3(\mathbb{R})$ car $0 \notin E$

$$\cdot \quad H \cdot H' = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m' & 1 & 1 \\ 1 & m' & 1 \\ 1 & 1 & m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mm'+2 & m+m'+1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \notin E$$

donc E n'est pas stable pour la multiplication

$$5/ \begin{cases} mx + y + z = m-1 \\ x + my + z = m+2 \\ x + y + mz = m^2-1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1)$$

• 3 cas : Si $m \neq 1$ et $m \neq -1$ alors $\Delta \neq 0$ donc le système

admet une solution unique (x, y, z)

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ m+2 & m & 1 \\ m^2-1 & 1 & m \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & m-1 & 1 \\ 1 & m+2 & 1 \\ 1 & m^2-1 & m \end{vmatrix}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} m & 1 & m-1 \\ 1 & m & m+2 \\ 1 & 1 & m^2-1 \end{vmatrix}$$



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..